

Репетиторский центр «100 баллов».
Математика.
Тренировочный тест №1. 2013-2014 год.
РЕШЕНИЕ

Часть А

A1.	<p>Известно, что a и b - цифры. Формула, выражающая число x, состоящее из a сотен, 8 десятков и b единиц имеет вид:</p> <p>1) $x = 100b + 80 + a$; 2) $x = 100a + 8 + b$; 3) $x = 8ab$; 4) $x = 800 + 10a + b$; 5) $x = 100a + 80 + b$.</p> <p><u>Решение.</u> Если число записано цифрами a, b и c, где a – количество сотен, b – количество десятков, c – количество единиц, то его можно представить в виде суммы $x = a \cdot 100 + b \cdot 10 + c$. Например, $785 = 7 \cdot 100 + 8 \cdot 10 + 5$. Поэтому в соответствии с условием имеем: $x = a \cdot 100 + 8 \cdot 10 + b$.</p> <p>Ответ: 5).</p>
A2.	<p>Укажите наименьшее целое значение x, которое удовлетворяет неравенству $\left x + 2\frac{2}{9} \right \leq 0,(7)$.</p> <p>1) 2; 2) -2; 3) -1; 4) -4; 5) -3.</p> <p><u>Решение.</u></p> <p>1) Сначала вспомним, что за число $0,(7)$. Это периодическая дробь: $0,77777\dots = 0,(7)$. Надо заменить эту бесконечную десятичную дробь обыкновенной дробью.</p> <p>Вспомним правило: чтобы превратить периодическую дробь в обыкновенную, надо из числа, стоящего до второго периода, вычесть число, стоящее до первого периода, и записать разность в числителе. А в знаменателе записать столько девяток, сколько цифр в периоде, и столько нулей, сколько цифр между запятой и первым периодом.</p> <p>Пример 1. Представить периодическую дробь $0,(72)$ в виде обыкновенной. $0,(72) = 0,727272\dots$ Первый период 72, второй период 72. Между запятой и началом второго периода число 72, между запятой и началом первого периода - цифр нет, то есть ноль. Поэтому, в числителе $72 - 0$. В знаменателе две девятки, так как в периоде две цифры, нулей нет, так как между запятой и первым периодом цифр нет: $0,(72) = \frac{72 - 0}{99} = \frac{72}{99} = \frac{8}{11}$.</p> <p>Пример 2. Представить периодическую дробь $0,1(72)$ в виде обыкновенной. $0,1(72) = 0,1727272\dots$ Первый период 72, второй период 72. Между запятой и началом второго периода число 172, между запятой и началом первого периода число 1. Поэтому, в числителе $172 - 1$. В знаменателе две девятки, так как две цифры в периоде, и один ноль, так как между запятой и первым периодом одна цифра. $0,1(72) = \frac{172 - 1}{990} = \frac{171}{990} = \frac{19}{110}$.</p> <p>Вернёмся к нашему примеру: $0,(7) = \frac{7 - 0}{9} = \frac{7}{9}$.</p> <p>2) Теперь раскроем модуль. Мы имеем дело с неравенством «модуль меньше».</p> <p>Решением неравенства типа $f(x) \leq a$, где $a > 0$ является система $\begin{cases} f(x) \leq a \\ f(x) \geq -a \end{cases}$ или двойное неравенство $-a \leq f(x) \leq a$</p> <p>Итак, неравенство преобразуем в двойное неравенство $-\frac{7}{9} \leq x + 2\frac{2}{9} \leq \frac{7}{9}$. Решаем это неравенство (если хотите, можно заменить его на систему обыкновенных неравенств).</p> $-\frac{7}{9} - 2\frac{2}{9} \leq x \leq \frac{7}{9} - 2\frac{2}{9}$

	<p>Мы видим, что ответ в таком виде нам не предлагается. Снова в скобках «под квадратом» поменяем все знаки. И снова сделаем это «бесплатно», то есть, не вынося минус за скобки, так как степень чётная. Получаем:</p> $0,6(x - y + 3)^2.$ <p>Ответ: 3).</p>
А6.	<p>Неизвестный член пропорции $\frac{2,3}{11,2 - 9\frac{2}{3}} = \frac{\frac{11}{3} : 3\frac{1}{3}}{x}$ равен... 1) 0,1; 2) $\frac{15}{11}$ 3) 1; 4) $\frac{11}{15}$; 5) 15.</p> <p><u>Решение.</u></p> <p>1) Сначала упростим выражение: $11,2 - 9\frac{2}{3} = 11\frac{1}{5} - 9\frac{2}{3} = 2\frac{1}{5} - \frac{2}{3} = 1\frac{8}{15} = \frac{23}{15}$.</p> $\frac{11}{3} : 3\frac{1}{3} = \frac{11}{3} \cdot \frac{3}{10} = \frac{11}{10}.$ <p>2) Перепишем пропорцию: $\frac{2,3}{\frac{23}{15}} = \frac{10}{x}$. Вспомним основное свойство пропорции:</p> <p>Если $\frac{a}{b} = \frac{c}{x}$, то $ax = bc$. Тогда $x = \frac{bc}{a}$.</p> <p>Применим это правило для решения заданной пропорции:</p> $x = \frac{\frac{23}{15} \cdot 11}{2,3} = \frac{23 \cdot 11}{15 \cdot 10 \cdot 2,3} = \frac{11}{15}.$ <p>Ответ: 4).</p>
А7.	<p>Если разделить 750 на две части так, чтобы 4% первой части в сумме с 12% второй части составили 5,6% всего числа, то меньшая часть числа равна...</p> <p>1) 200; 2) 250; 3) 93,75; 4) 300; 5) 150.</p> <p><u>Решение.</u></p> <p>Пусть искомые числа x и y. Тогда имеет место уравнение $x + y = 750$.</p> <p>Для составления второго уравнения вспомним, что проценты нужно представить в виде десятичной дроби. Для этого нужно число процентов разделить на 100. Например, 1% = 0,01; 50% = 0,5.</p> <p>В данном случае 4% первого числа равны $0,04x$, 12% второго числа – это $0,12y$. А 5,6% всего числа равны $0,056 \cdot 750$. Получаем второе уравнение: $0,04x + 0,12y = 0,056 \cdot 750$.</p> <p>Получили систему уравнений: $\begin{cases} x + y = 750; \\ 0,04x + 0,12y = 42. \end{cases}$ Для решения упростите второе уравнение, домножив его на 100 и разделив на 4. Получаем $y = 150, x = 600$.</p> <p>Ответ: 5).</p>
А8.	<p>Пусть: $a = 32 \cdot 10^5$, $b = 0,5 \cdot 10^{-4}$. Найдите значение выражения $\left(\frac{b}{a}\right)^{-1}$ и представьте результат в стандартном виде.</p> <p>1) $6,4 \cdot 10^{10}$; 2) $1,6 \cdot 10^{-10}$; 3) $6,4 \cdot 10^9$; 4) $0,64 \cdot 10^{-9}$; 5) $64 \cdot 10^9$.</p> <p><u>Решение.</u></p> <p>Подставим заданные значения:</p>

$$\left(\frac{b}{a}\right)^{-1} = \left(\frac{\frac{1}{2} \cdot 10^{-4}}{32 \cdot 10^5}\right)^{-1} = \left(\frac{1}{32 \cdot 2 \cdot 10^4 \cdot 10^5}\right)^{-1} = \left(\frac{1}{2^6 \cdot 10^9}\right)^{-1} = 2^6 \cdot 10^9 = 64 \cdot 10^9 = 6,4 \cdot 10^{10}.$$

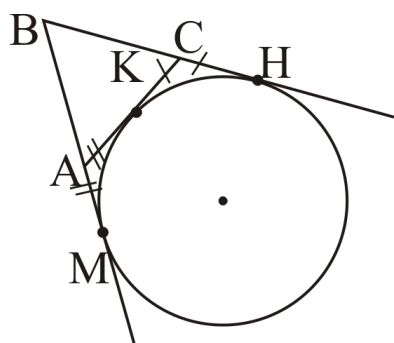
Вспомним, как представить число в стандартном виде. Для этого его надо записать в виде произведения, где у первого множителя целая часть от 1 до 9, а второй множитель – это какая-то степень числа 10. При этом если мы переносим запятую в первом множителе влево, то степень десятки увеличивается, а если вправо, то уменьшается.

Пример 1. $0,256 = 2,56 \cdot 10^{-1}$.

Пример 2. $3251 = 3,251 \cdot 10^3$.

Ответ: 1).

- A9. Окружность касается стороны AC треугольника ABC в точке K и продолжений сторон AB и BC в точках M и H соответственно. Периметр треугольника ABC равен 36 см. Найдите длину отрезка касательной BH . 1) 3; 2) 6; 3) 18; 4) 12; 5) 9.



Решение.

Для решения вспомним теорему, которая гласит, что отрезки касательных, проведённых из одной точки к точкам касания, равны.

Из точки B : $BM = BH$. При этом $BM = BA + AM$, $BH = BC + CH$.

Из точки A : $AM = AK$.

Из точки C : $CK = CH$.

Тогда $BA + AK = BC + CK$.

Но периметр треугольника ABC – это сумма $AB + BC + AC$, где $AC = AK + KC$.

Тогда $P_{\triangle ABC} = AB + BC + AK + KC = BM + BH = 2BH$. Получаем, что $BH = 36 : 2 = 18$.

Ответ: 3).

- A10. Металлический цилиндр с площадью основания 4см^2 переплавлен в конус, высота которого в 6 раз меньше высоты цилиндра. Найдите площадь основания конуса. 1) 72см^2 ; 2) 24см^2 ; 3) 2см^2 ; 4) 36см^2 ; 5) 18см^2 .

Решение.

Так как цилиндр переплавили в конус, то мы считаем, что $V_{\text{цилиндра}} = V_{\text{конуса}}$.

Вспомним, что $V_{\text{цилиндра}} = S_{\text{осн}} \cdot H_{\text{к}}$, а $V_{\text{конуса}} = \frac{1}{3} S_{\text{осн}} \cdot h_{\text{ц}}$. По условию задачи $H_{\text{к}} = 6 \cdot h_{\text{ц}}$.

Получаем:

$$S_{\text{осн.к}} \cdot H_{\text{к}} = \frac{1}{3} S_{\text{осн.ц}} \cdot h_{\text{ц}}$$

$$S_{\text{осн.к}} \cdot 6 h_{\text{ц}} = \frac{1}{3} S_{\text{осн.ц}} \cdot h_{\text{ц}}, \text{ откуда } S_{\text{осн.ц}} = 72.$$

Ответ: 1).

- A11. Сколько положительных членов содержит арифметическая прогрессия $4,6; 4,2; 3,8 \dots$ 1) 13; 2) 12; 3) 25; 4) 11; 5) 10.

Решение.

Мы имеем прогрессию, у которой $a_1 = 4,6$, $a_2 = 4,2, \dots$

Найдём разность прогрессии: $d = a_2 - a_1 = 4,2 - 4,6 = -0,4$.

Запишем формулу n -го члена прогрессии: $a_n = a_1 + d(n - 1)$.

Подставляем данные задачи: $a_n = a_1 + d(n - 1) = 4,6 - 0,4(n - 1) = 5 - 0,4n$.

Теперь задача сводится к тому, чтобы найти наибольшее целое n , при котором $a_n > 0$.

Решаем неравенство $5 - 0,4n > 0$. Получаем $n < 12,5$.

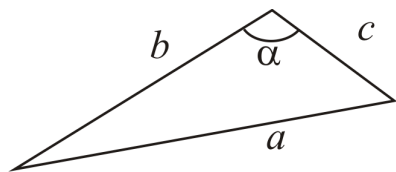
Наибольшее целое n , удовлетворяющее данному неравенству равно 12.

Ответ: 2).

A12. Найдите длину третьей стороны треугольника, если длины двух других его сторон являются корнями квадратного трёхчлена $x^2 - 13x + 20$, а угол между ними равен 120° .

1) $\sqrt{189}$; 2) $\sqrt{249}$; 3) $\sqrt{7}$; 4) 10; 5) $\sqrt{149}$.

Решение.



Сначала найдём корни квадратного трёхчлена, решив квадратное уравнение $x^2 - 13x + 20 = 0$.

Не пугайтесь, получив «некрасивые» корни: $x_{1,2} = \frac{13 \pm \sqrt{89}}{2}$.

Для решения задачи воспользуемся теоремой косинусов.

Напомним её: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$.

Т.к. по условию задачи $\alpha = 120^\circ$, то, подставляя найденные ранее длины сторон b и c , получаем, что

$$a^2 = \left(\frac{13 + \sqrt{89}}{2}\right)^2 + \left(\frac{13 - \sqrt{89}}{2}\right)^2 - 2 \cdot \frac{13 + \sqrt{89}}{2} \cdot \frac{13 - \sqrt{89}}{2} \cdot \cos 120^\circ.$$

Учтём, что: $\cos 120^\circ = -\cos 60^\circ = -\frac{1}{2}$.

Проведя вычисления, получаем, что $a^2 = 149$.

Можно было бы решить задачу с использованием теоремы Виета.

$$x^2 - 13x + 20 = 0 \Rightarrow x_1 + x_2 = 13, x_1 \cdot x_2 = 20 \Rightarrow$$

$$a^2 = x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2 \cos 120^\circ = x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) =$$

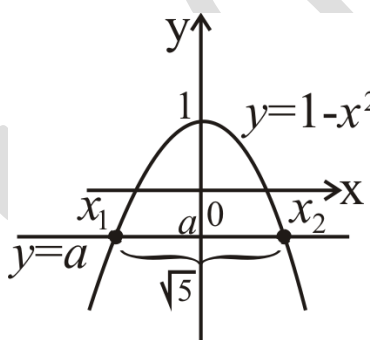
$$= (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 + x_1x_2 = (x_1 + x_2)^2 - x_1x_2 = 13^2 - 20 = 169 - 20 = 149$$

Ответ: 5).

A13. Расстояние между точками пересечения параболы $y = 1 - x^2$ с прямой $y = a$ составляет $\sqrt{5}$, если a равно...

1) $-\frac{1}{4}$; 2) $-\frac{3}{2}$; 3) $\frac{3}{2}$; 4) $-\frac{9}{4}$; 5) $\frac{9}{4}$.

Решение.



Для начала давайте вспомним, что из себя представляют графики, о которых идёт речь.

$y = 1 - x^2$ – это парабола, ветви которой направлены вниз, т.к. коэффициент перед x^2 отрицательный (он равен -1), а $y = a$ – это прямая, параллельная оси Ox и пересекающая ось Oy в точке $(0; a)$.

Поскольку в условии сказано, что графики имеют две точки пересечения, то рисунок к задаче выглядит так:

Точки $(x_1; a)$ и $(x_2; a)$ – это точки пересечения графиков. Причём x_1 и x_2 – противоположные числа, то есть $x_1 = -x_2$. Тогда расстояние между ними равно

$2|x_1| = 2|x_2| = \sqrt{5}$. Откуда $|x_2| = \frac{\sqrt{5}}{2}$. Осталось вспомнить, что координаты точки пересечения

графиков $(x_2; a)$ удовлетворяют уравнениям обеих функций, в том числе и параболы. Подставляем координаты точки в уравнение параболы и получаем:

$$a = 1 - \left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2 = 1 - \frac{5}{4} = -\frac{1}{4}.$$

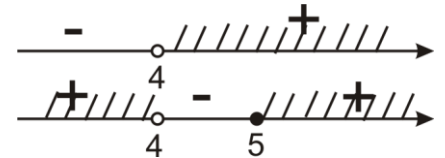
Ответ: 1).

<p>A14.</p>	<p><i>Среди приведенных утверждений</i></p> <p>1) $(\sqrt{1,01})^{-\pi} > 1$; 2) $\left(\frac{\pi}{3}\right)^{\cos 100^\circ} > 1$; 3) $\left(\frac{\pi}{4}\right)^{\sqrt{2}} > 1$; 4) $(0,5)^{\cos 100^\circ} > 1$; 5) $(0,5)^\pi > 1$</p> <p><i>укажите номера верных. 1) 1, 3; 2) 2; 3) 3, 5; 4) 4; 5) 1, 5, 3.</i></p> <p><u>Решение.</u> Разберём по очереди все неравенства.</p> <p>1) $(\sqrt{1,01})^{-\pi} > 1$. Учтём, что $\sqrt{1,01} > 1$. Число, большее 1, будучи возведённым в отрицательную степень, становится меньше 1. Итак, неравенство 1) – неверное.</p> <p>2) $\left(\frac{\pi}{3}\right)^{\cos 100^\circ} > 1$. Учтём, что $\frac{\pi}{3} > 1$, а $\cos 100^\circ < 0$. Число, большее 1, будучи возведённым в отрицательную степень, становится меньше 1. Итак, неравенство 2) – неверное.</p> <p>3) $\left(\frac{\pi}{4}\right)^{\sqrt{2}} > 1$. Учтём, что $\frac{\pi}{4} < 1$, а $\sqrt{2} > 0$. Положительное число, меньшее 1, будучи возведённым в положительную степень, остаётся меньше 1. Итак, неравенство 3) – неверное.</p> <p>4) $(0,5)^{\cos 100^\circ} > 1$. Учтём, что $0,5 < 1$, а $\cos 100^\circ < 0$. Положительное число, меньшее 1, будучи возведённым в отрицательную степень, становится больше 1. Итак, неравенство 4) – верное.</p> <p>5) $(0,5)^\pi > 1$. Учтём, что $0,5 < 1$. Положительное число, меньшее 1, будучи возведённым в положительную степень, остаётся меньше 1. Итак, неравенство 5) – неверное.</p> <p>Ответ: 4).</p>
<p>A15.</p>	<p><i>В треугольнике с вершинами A(14;-13), B(16;-14) и C(17;-17) угол при вершине B в градусах равен...</i></p> <p>1) 45°; 2) 135°; 3) 90°; 4) 60°; 5) 120°.</p> <p><u>Решение.</u> В задании A3 мы уже вспоминали, что расстояние между точками вычисляется по формуле $r = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$. Найдём длины всех сторон треугольника:</p> $AB = \sqrt{(16 - 14)^2 + (-14 + 13)^2} = \sqrt{5}$ $AC = \sqrt{(17 - 14)^2 + (-17 + 13)^2} = 5$ $BC = \sqrt{(17 - 16)^2 + (-17 + 14)^2} = \sqrt{10}.$ <p>Дальше воспользуемся теоремой косинусов (см. A12):</p> $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2 \cdot AB \cdot BC \cdot \cos B.$ <p>Подставляем длины сторон:</p> $5^2 = \sqrt{5}^2 + \sqrt{10}^2 - 2 \cdot \sqrt{5} \cdot \sqrt{10} \cdot \cos B.$ <p>Выражаем значение косинуса угла B.</p> <p>Получаем, что: $\cos B = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, поэтому $\angle B = 135^\circ$ (если косинус угла в треугольнике отрицателен, то этот угол – тупой).</p> <p>Ответ: 2).</p>

<p>A16.</p>	<p>Сумма корней (корень, если он единственный) уравнения $\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1+x}} + \sqrt{\frac{1+x}{x}} = \frac{5}{2}$ равна (равен):</p> <p>1) $\frac{4}{3}$; 2) -1; 3) 1; 4) $\frac{1}{3}$; 5) 3.</p> <p><u>Решение.</u> Начнём с ОДЗ. Заметим, что первое и второе слагаемое, не смотря на свою похожесть, имеют разную ОДЗ. Итак, ОДЗ уравнения: $\begin{cases} x > 0 \\ 1+x > 0 \end{cases}$, что равносильно неравенству $x > 0$. В остальном можно считать слагаемые взаимно обратными числами. Введём замену переменных: $t = \sqrt{\frac{1+x}{x}}$; $\frac{1}{t} = \sqrt{\frac{x}{1+x}}$. Тогда имеем уравнение $t + \frac{1}{t} - \frac{5}{2} = 0$. Приводим к общему знаменателю: $\frac{2t^2 - 5t + 2}{2t} = 0$. $t_1 = \frac{1}{2}$; $t_2 = 2$. Проводим обратную замену: $\sqrt{\frac{1+x}{x}} = \frac{1}{2}$; $\sqrt{\frac{1+x}{x}} = 2$ и решаем два получившихся уравнения. Не забудьте проверить корни по ОДЗ! Единственным решением является $x = \frac{1}{3}$ Ответ: 4).</p>
<p>A17.</p>	<p>Решением неравенства $\left(\frac{1}{4}\right)^{\log_{0,8} \log_3 \frac{x-2}{x-4}} \leq 1$ является:</p> <p>1) $(5; \infty)$; 2) $(-\infty; -4) \cup [5; \infty)$; 3) $(4; 5]$; 4) $[5; \infty)$; 5) $(4; \infty)$.</p> <p><u>Решение.</u> 1) Сначала разберёмся с показательным неравенством. Единицу мы всегда можем представить в виде удобного нам числа в нулевой степени: $\left(\frac{1}{4}\right)^{\log_{0,8} \log_3 \frac{x-2}{x-4}} \leq \left(\frac{1}{4}\right)^0$. Основания одинаковые, поэтому можем сравнивать показатели степени. Не забудьте, что так как основание $\frac{1}{4} < 1$, необходимо поменять знак неравенства: $\log_{0,8} \log_3 \frac{x-2}{x-4} \geq 0$. 2) В первую очередь решаем неравенство относительно логарифма с основанием $0,8 < 1$, поэтому меняем знак неравенства: $\log_3 \frac{x-2}{x-4} \leq 0,8^0$, т.е. $\log_3 \frac{x-2}{x-4} \leq 1$. 3) Теперь разберёмся с логарифмом с основанием 3: $\frac{x-2}{x-4} \leq 3$. 4) Осталось только учесть ОДЗ, не потеряв ничего: $\begin{cases} \log_3 \frac{x-2}{x-4} > 0; \\ \frac{x-2}{x-4} > 0. \end{cases} \begin{cases} \frac{x-2}{x-4} > 1; \\ \frac{x-2}{x-4} > 0. \end{cases}$ Здесь достаточно решить только первое неравенство, тогда второе выполняется автоматически.</p>

Итак, собираем обе части решения в одну систему:

$$\begin{cases} \frac{x-2}{x-4} > 1; \\ \frac{x-2}{x-4} \leq 3. \end{cases} \begin{cases} \frac{x-2-x+4}{x-4} > 0; \\ \frac{x-2-3x+12}{x-4} \leq 0. \end{cases} \begin{cases} \frac{2}{x-4} > 0; \\ \frac{-2x+10}{x-4} \leq 0. \end{cases} \begin{cases} \frac{2}{x-4} > 0; \\ \frac{x-5}{x-4} \geq 0. \end{cases}$$

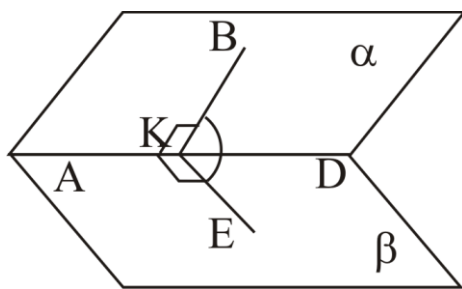


Получаем: $x \in [5; +\infty)$.

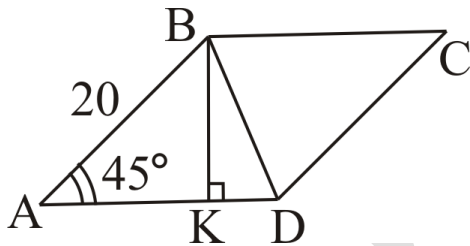
Ответ: 4).

A18. В ромбе $ABCD$ сторона $AB = 20$ см, угол $BAD = 45^\circ$, точка E - основание перпендикуляра, проведенного из вершины B к плоскости α , содержащей сторону AD . Вычислите расстояние от точки E до плоскости (ABC) , если двугранный угол $BADE$ равен 60° .

- 1) $\frac{5\sqrt{6}}{2}$; 2) $5\sqrt{6}$; 3) $\frac{\sqrt{6}}{2}$; 4) $5\sqrt{3}$; 5) 10.

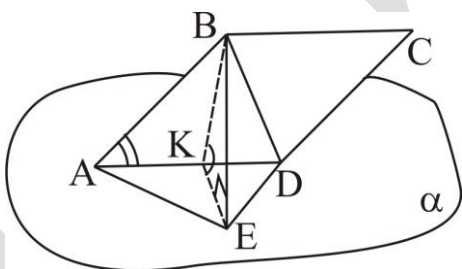


Решение. Сначала давайте вспомним, как изобразить двугранный угол. Двугранный угол – это угол между плоскостями (в данном случае между α и β . Общая прямая этих плоскостей – это ребро двугранного угла (AD). Возьмём любую точку на ребре AD (точка K). Восстановим из этой точки два перпендикуляра к прямой AD – один в плоскости α , а другой – в плоскости β . Угол между этими перпендикулярами равен по величине двугранному углу. На рисунке это $\angle BKE$.

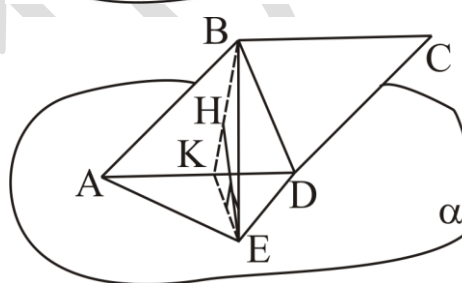


Теперь давайте рассмотрим параллелограмм $ABCD$. Поскольку нам придётся выбирать на ребре AD точку, из которой будем восстанавливать перпендикуляр, выберем эту точку K так, чтобы перпендикуляром был отрезок BK : $BK \perp AD$. Рассмотрим $\triangle ABK$. Он прямоугольный, значит, равнобедренный: $AK = BK$. По теореме Пифагора

$$AK = KB = 10\sqrt{2}.$$



Вернёмся к условию задачи. Чтобы построить чертёж, надо понять, что ромб наклонен к плоскости α , при этом сторона AD лежит в этой плоскости. По теореме о трёх перпендикулярах перпендикуляр к прямой AD , восстановленный в точке K пройдёт через точку E . Поэтому на чертеже $\angle BKE = 60^\circ$.



Теперь поймём, что нам надо найти. Расстоянием от точки E до плоскости (ABC) будет перпендикуляр EH , опущенный на KB . Сделаем отдельно чертёж треугольника KBE . Нам известно, что $\angle BKE = 60^\circ$, $\angle BEK = 90^\circ$, $BK = 10\sqrt{2}$. Тогда $KE = 5\sqrt{2}$, как катет, лежащий напротив $\angle B = 30^\circ$.

В $\triangle EKH$: $KH = \frac{5\sqrt{2}}{2}$, тоже, как катет, лежащий напротив $\angle KEN = 30^\circ$.

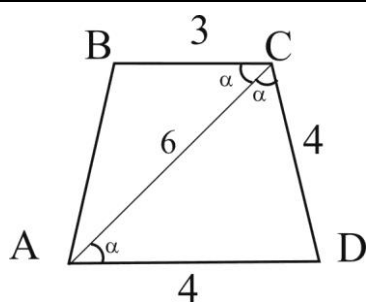
Осталось в $\triangle EKH$ по теореме Пифагора найти:

$$EH = \frac{5\sqrt{6}}{2}.$$

Ответ: 1).

Часть В

В1.



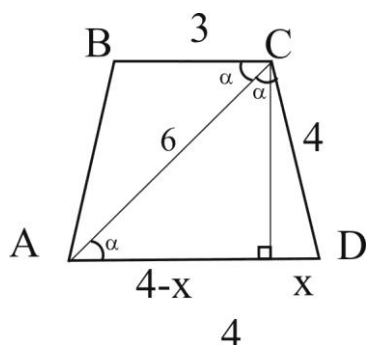
В трапеции с основаниями 3 и 4 диагональ имеет длину 6 и является биссектрисой одного из углов. Площадь трапеции, умноженная на $\sqrt{112}$ равна ...

Решение.

Предположим, что в условии задачи речь идёт о биссектрисе острого угла. Тогда треугольник ABC - равнобедренный со сторонами 3, 3 и 6. Но такого треугольника существовать не может, т.к. сумма двух сторон треугольника должна быть больше третьей.

Значит, в условии задачи речь идёт о биссектрисе тупого угла.

Тогда треугольник ACD - равнобедренный со сторонами 4, 4 и 6.



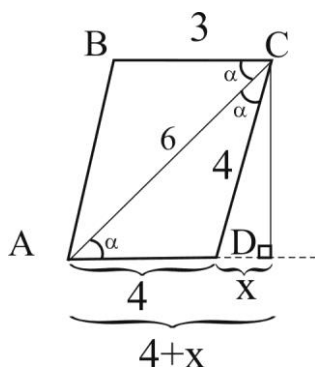
Опустим из точки C высоту h , которая разбивает сторону AD на отрезки x и $4-x$.

Запишем систему уравнений из двух теорем Пифагора

$$\begin{cases} h^2 + x^2 = 16 \\ h^2 + (4-x)^2 = 36 \end{cases}$$

Решим систему уравнений и получим, что x - отрицательный!!!

Такое может быть, если трапеция имеет вид представленный на последнем рисунке.



Тогда система уравнений имеет вид:

$$\begin{cases} h^2 + x^2 = 16 \\ h^2 + (4+x)^2 = 36 \end{cases}$$

2 способ решения.

Рассмотрим $\triangle ACD$. Его высота будет высотой трапеции.

Найдём площадь треугольника по формуле Герона:

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}, \text{ где } p - \text{ полупериметр треугольника, } a, b, c - \text{ его стороны.}$$

В данной задаче $p = 7$.

$S = \sqrt{7(7-6)(7-4)(7-4)} = 3\sqrt{7}$. Теперь вспомним вторую формулу вычисления площади:

$S = \frac{1}{2}ah_a$. Поскольку нас интересует высота, проведенная к стороне AD , то считаем $a = 4$.

Получаем: $3\sqrt{7} = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot h$, откуда $h = \frac{3\sqrt{7}}{2}$. Осталось найти площадь трапеции: $S = \frac{a+b}{2}h$

Подставив значения, получаем $S = \frac{3+4}{2} \cdot \frac{3\sqrt{7}}{2} = \frac{21\sqrt{7}}{4}$.

Не забудьте, что по условию ответ задачи надо умножить на $\sqrt{112}$: $\frac{21\sqrt{7}}{4} \cdot \sqrt{112} = \frac{21\sqrt{7} \cdot 4\sqrt{7}}{4} = 147$.

Ответ: 147.

В2.

Если $\log_{a^3} \sqrt{b} = 2$, то выражение $120 \log_{a^3 \cdot \sqrt{b^7}} \left(\frac{a^2 \cdot b^5}{\sqrt[13]{a \cdot b}} \right)^{\frac{1}{5}}$ равно ...

Решение.

В отличие от других разделов, здесь более быстрым решением будет не преобразование исходного примера, а использование дополнительного условия $\log_{a^3} \sqrt{b} = 2$.

$\sqrt{b} = a^6 \Rightarrow b = a^{12}$. Теперь подставим в исходное выражение вместо b выражение a^{12} .

$$\log_{a^3 \cdot \sqrt[4]{a^{84}}} \left(\frac{a^2 \cdot a^{60}}{\sqrt[13]{a \cdot a^{12}}} \right)^{\frac{1}{5}} = \log_{a^{24}} \left(\frac{a^{62}}{a^1} \right)^{\frac{1}{5}} = -\frac{1}{5} \cdot \log_{a^{24}} a^{61} =$$

$$= -\frac{1}{5} \cdot 61 \cdot \frac{1}{24} \cdot \log_a a = -\frac{61}{120}$$

Умножив на 120, получим ответ.

Ответ: -61.

В3.

Произведение корней уравнения $3\left(x^2 + \frac{4}{x^2}\right) - 2\left(x - \frac{2}{x}\right) = 13$ равно...

Решение.

Для решения подобных уравнений надо вспомнить «фокус», который можно применить к сумме квадратов. Когда речь шла о разложении её на множители, но здесь проведём следующие преобразования:

$$a^2 + b^2 = a^2 + b^2 + 2ab - 2ab = (a+b)^2 - 2ab$$

$$a^2 + b^2 = a^2 + b^2 - 2ab + 2ab = (a-b)^2 + 2ab.$$

Какую из формул выбрать, зависит от того, какую замену переменных удобно выполнить.

В данном примере преобразуем выражение в первых скобках:

$$x^2 + \frac{4}{x^2} - 2x \frac{2}{x} + 2x \frac{2}{x} = \left(x - \frac{2}{x}\right)^2 + 4.$$

Обратите внимание, что все «лишние» x сократились. Вернёмся к уравнению.

$$3\left(\left(x - \frac{2}{x}\right)^2 + 4\right) - 2\left(x - \frac{2}{x}\right) = 13.$$

Введём замену переменных: $t = x - \frac{2}{x}$.

$$3(t^2 + 4) - 2t = 13. \quad t_1 = 1, \quad t_2 = -\frac{1}{3}.$$

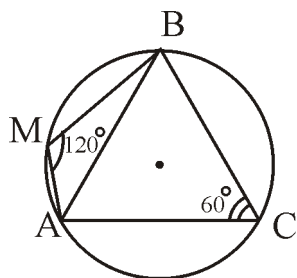
Осталось решить два уравнения: $x - \frac{2}{x} = 1$ и $x - \frac{2}{x} = -\frac{1}{3}$.

Корни уравнений: $\frac{-1 \pm \sqrt{73}}{6}$; -1; 2. Перемножив эти корни, получаем 4.

Ответ: 4.

В4. На окружности радиуса 5, описанной около правильного треугольника ABC , взята точка M . Известно, что расстояние от точки M до одной из вершин треугольника равно 9. Сумма расстояний от точки M до двух других вершин треугольника равна...

Решение.



Вспользуемся теоремой синусов, чтобы найти сторону треугольника:

$$\frac{a}{\sin \alpha} = 2R.$$

Отсюда выражаем сторону треугольника:

$$a = 2R \cdot \sin \alpha = 2 \cdot 5 \cdot \sin 60^\circ = 5\sqrt{3}.$$

Теперь определимся, расстояние до какой точки равно 9?

Рассмотрим четырёхугольник $AMBC$. Так как он вписан в окружность, то сумма его противоположных углов равна 180° , а значит, $\angle AMB = 120^\circ$.

Допустим, $AM = 9$. В треугольнике AMB самый большой угол 120° , значит, напротив него должна лежать самая большая сторона (неравенство треугольника). Сравним 9 и $5\sqrt{3}$.

Оказывается, что сторона MA больше, чем AB . Получили противоречие.

Значит, заданное расстояние 9 – это MC .

Рассмотрим $\angle BMC$ и $\angle BAC$. Они равны, так как опираются на одну дугу окружности.

Рассмотрим $\triangle BMC$. В нём $MC = 9$, $BC = 5\sqrt{3}$, $\angle BMC = 60^\circ$. Обозначим: $MB = x$ и запишем теорему косинусов для данного треугольника:

$$BC^2 = MC^2 + MB^2 - 2MC \cdot MB \cdot \cos \angle M.$$

Получаем: $(5\sqrt{3})^2 = x^2 + 81 - 2x \cdot 9 \cdot \frac{1}{2}$. Упрощаем: $x^2 - 9x + 6 = 0$.

Находим корни данного уравнения: $x_{1,2} = \frac{9 \pm \sqrt{57}}{2}$.

Из $\triangle AMC$ аналогично находим $y_{1,2} = \frac{9 \pm \sqrt{57}}{2}$.

Вспомните, что мы ищем – сумму значений x и y . Осталось понять, может ли x быть равен y . Если это так, то треугольник AMB равнобедренный. Вспомним, что $\angle AMB = 120^\circ$, $\angle CMB = 60^\circ$. Значит, MC – биссектриса треугольника, которая является серединным перпендикуляром отрезка AB . Центр описанной вокруг треугольника окружности (в данном случае $\triangle ABM$) должен находиться как раз на серединном перпендикуляре к стороне треугольника. То есть отрезок MC должен быть диаметром окружности, а это невозможно ($MC = 9$, а диаметр 10).

Значит, $x \neq y$.

Тогда искомая сумма: $x + y = \frac{9 + \sqrt{57}}{2} + \frac{9 - \sqrt{57}}{2} = 9$.

Ответ: 9

В5.

Сумма целых решений неравенства $\frac{\log_{x+1}|x-2|}{x^2 - 3x - 10} \leq 0$ равна...

Решение.

При решении неравенств очень удобно использовать обобщенный метод интервалов.

При решении этим методом действуйте по схеме:

1. Определите ОДЗ
2. Преобразуйте неравенство так, чтобы в правой части был ноль (в левой части, если это возможно, приведите к общему знаменателю, разложите на множители и т.п.)
3. Найдите все корни числителя и знаменателя и нанесите их на числовую ось, причём, если неравенство нестрогое, закрасьте корни числителя
4. Найдите знаки на каждом из интервалов, подставляя в преобразованное неравенство число из данного интервала. НЕЛЬЗЯ РАССТАВЛЯТЬ ЗНАКИ ПО ПРИНЦИПУ ПЛЮС – МИНУС – ПЛЮС
5. Найдите пересечение ОДЗ и удовлетворяющих неравенству промежутков, при этом не потеряйте

отдельные точки, удовлетворяющих неравенству.

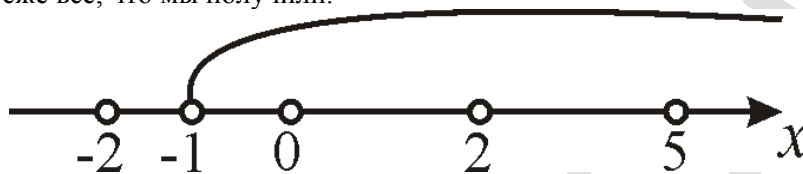
Переходим к решению данного примера.

1. Область Допустимых Значений в числителе мы найдём, исходя из того, что основание логарифма больше нуля и не равно 1, а подлогарифмическое выражение больше нуля.

Область Допустимых Значений в знаменателе мы найдём, исходя из того, что знаменатель не может быть равен нулю.

$$\text{Получаем } \begin{cases} x+1 > 0 \\ x+1 \neq 1 \\ |x-2| > 0 \\ x^2 - 3x - 10 \neq 0 \end{cases} \quad \text{Тогда } \begin{cases} x > -1 \\ x \neq 0 \\ x \neq 2 \\ x \neq -2, x \neq 5 \end{cases}$$

Изобразим на чертеже всё, что мы получили.



Учтём, что выражение $x \neq -2$ нас не интересует, так как $x > -1$

2. Этот пункт в данном случае выполнять не надо, так как в правой части неравенства число 0.

3. Корни знаменателя нами уже найдены. Будем искать корни числителя. Для этого решим уравнение:

$$\log_{x+1}|x-2| = 0$$

Получаем корни $x = 3$ и $x = 1$. Оба корня удовлетворяют ОДЗ, поэтому наносим их на координатную ось, причём точки закрашиваем, так как неравенство нестрогое.



4. Находим знаки неравенства на каждом из промежутков, подставляя в неравенство соответствующие числа.

При решении неравенств будем учитывать, что **логарифм положителен**, если подлогарифмическое выражение, и основание логарифма больше 1, или если подлогарифмическое выражение, и основание логарифма меньше 1. **Логарифм отрицателен**, если подлогарифмическое выражение больше 1, а основание логарифма меньше 1, или если подлогарифмическое выражение меньше 1, а основание логарифма больше 1.

$$\log_a b > 0, \text{ если } \begin{cases} b > 1 \\ a > 1 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} 0 < b < 1 \\ 0 < a < 1 \end{cases}$$

$$\log_a b < 0, \text{ если } \begin{cases} b > 1 \\ 0 < a < 1 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} 0 < b < 1 \\ a > 1 \end{cases}$$

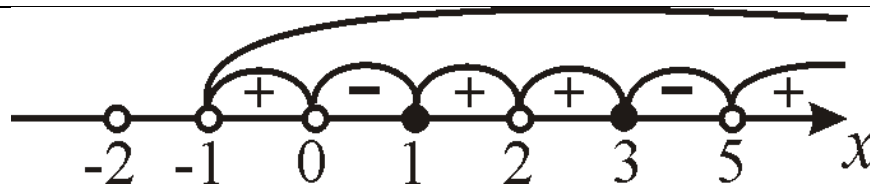
Для крайнего справа интервала выберем $x = 6$. В числителе и знаменателе получаем положительное выражение.

Для следующего интервала выберем $x = 4$. В числителе получаем положительное выражение, а в знаменателе - отрицательное.

Для следующего интервала выберем $x = 2,5$. В числителе получаем отрицательное выражение, в знаменателе тоже отрицательное

Для следующего интервала выберем $x = 1,5$. В числителе получаем отрицательное выражение, в знаменателе тоже отрицательное. Итак, мы видим, что на двух соседних интервалах одинаковый знак выражения.

Продолжите расставлять знаки самостоятельно.



Получим решение неравенства $(0;1] \cup [3;5)$. Целые решения: 1, 3, 4.

Ответ: 8

- В6. Сумма трёх чисел, составляющих возрастающую геометрическую прогрессию, равна 70, а если из них вычесть соответственно 2, 8 и 24, то вновь полученные числа составят арифметическую прогрессию. Сумма первых двенадцати членов исходной геометрической прогрессии равна ...

Решение.

По условию $b_1 + b_1q + b_1q^2 = 70$.

С другой стороны, мы имеем арифметическую прогрессию, члены которой равны:

$$a_1 = b_1 - 2; \quad a_2 = b_1q - 8; \quad a_3 = b_1q^2 - 24.$$

Вспомним свойство арифметической прогрессии: $2a_2 = a_1 + a_3$. Подставим имеющиеся значения.

Получаем систему уравнений:
$$\begin{cases} b_1 + b_1q + b_1q^2 = 70; \\ 2(b_1q - 8) = b_1 - 2 + b_1q^2 - 24 \end{cases}$$
 . Раскрываем скобки, приводим

подобные слагаемые:
$$\begin{cases} b_1(1 + q + q^2) = 70; \\ b_1(q^2 - 2q + 1) = 10 \end{cases}$$
 Делим первое уравнение на второе, применяем правило

пропорции, приводим подобные слагаемые. Получаем уравнение: $2q^2 - 5q + 2 = 0$.

Получаем $q_1 = 2$, $q_2 = 0,5$ – не удовлетворяет условию задачи, так как прогрессия является возрастающей.

Находим $b_1 = 10$.

Формула суммы n членов геометрической прогрессии: $S_n = \frac{b_1(q^n - 1)}{(q - 1)}$.

$$\text{Находим } S_{12} = \frac{10 \cdot (2^{12} - 1)}{(2 - 1)} = 40950.$$

Ответ: 40950.

- В7. Сумма корней (корень, если он единственный) уравнения

$$\left(\sqrt{6 + \sqrt{20}} - \sqrt{6 - \sqrt{20}} \right)^{2x} + 2^{2(x+1)} = 320 \text{ равна ...}$$

Решение. Выделим под каждым корнем полный квадрат:

$$\sqrt{6 + \sqrt{20}} = \sqrt{6 + 2\sqrt{5}} = \sqrt{5 + 2\sqrt{5} \cdot 1 + 1} = \sqrt{(\sqrt{5} + 1)^2} = \sqrt{5} + 1$$

$$\sqrt{6 - \sqrt{20}} = \sqrt{6 - 2\sqrt{5}} = \sqrt{5 - 2\sqrt{5} \cdot 1 + 1} = \sqrt{(\sqrt{5} - 1)^2} = \sqrt{5} - 1$$

Тогда условие преобразуем так: $(\sqrt{5} + 1 - \sqrt{5} + 1)^{2x} + 2^{2x} \cdot 2^2 = 320$

$$2^{2x} + 2^{2x} \cdot 4 = 320.$$

Вынесем общий множитель:

$$2^{2x}(1 + 4) = 320$$

$$2^{2x} = 64$$

$$2x = 6$$

$$x = 3.$$

Ответ: 3

В8.	<p>Сумма корней (в градусах) уравнения $2\operatorname{tg}4x \cdot \sin\frac{x}{2} \cdot \sin x \cdot \cos\frac{x}{2} - \operatorname{tg}4x = 0$ на промежутке $[0; 180^\circ]$ равна ...</p> <p><u>Решение.</u> Упростим выражение. Для этого вынесем $\operatorname{tg}4x$ за скобки и поменяем множители местами так, чтобы удобно было выполнять дальнейшие преобразования.</p> $\operatorname{tg}4x \cdot (2\sin\frac{x}{2} \cdot \cos\frac{x}{2} \cdot \sin x - 1) = 0$ $\operatorname{tg}4x \cdot (\sin x \cdot \sin x - 1) = 0$ $\operatorname{tg}4x \cdot (\sin^2 x - 1) = 0$ $\operatorname{tg}4x \cdot \cos^2 x = 0$ <p>Итак, получаем две ветки решения:</p> $\operatorname{tg}4x = 0 \qquad \text{или} \qquad \cos^2 x = 0$ $4x = \pi n \qquad \qquad \qquad x = \frac{\pi}{2} k$ $x = \frac{\pi}{4} n. \text{ Отбираем корни, принадлежащие промежутку } [0; 180^\circ].$ <table style="width: 100%; border: none;"> <tr> <td style="width: 50%;">$n = 0, x = 0^\circ$</td> <td style="width: 50%;">$k = 0, x = 0^\circ$</td> </tr> <tr> <td>$n = 1, x = 45^\circ$</td> <td>$k = 1, x = 90^\circ$</td> </tr> <tr> <td>$n = 2, x = 90^\circ$</td> <td>$k = 2, x = 180^\circ$</td> </tr> <tr> <td>$n = 3, x = 135^\circ$</td> <td></td> </tr> <tr> <td>$n = 4, x = 180^\circ$</td> <td></td> </tr> </table> <p>Как видим, все корни, полученные во втором уравнении, уже встретились нам в первом. Поэтому исходное уравнение имеет на указанном промежутке 5 корней. Обратите внимание, что мало просто посчитать количество корней в каждой части уравнения, надо ещё проверить, не повторяются ли они. Сложим полученные значения x.</p> <p>Ответ: 450.</p>	$n = 0, x = 0^\circ$	$k = 0, x = 0^\circ$	$n = 1, x = 45^\circ$	$k = 1, x = 90^\circ$	$n = 2, x = 90^\circ$	$k = 2, x = 180^\circ$	$n = 3, x = 135^\circ$		$n = 4, x = 180^\circ$	
$n = 0, x = 0^\circ$	$k = 0, x = 0^\circ$										
$n = 1, x = 45^\circ$	$k = 1, x = 90^\circ$										
$n = 2, x = 90^\circ$	$k = 2, x = 180^\circ$										
$n = 3, x = 135^\circ$											
$n = 4, x = 180^\circ$											
В9.	<p>Если $\sin\alpha + \sin\beta = -\frac{21}{65}$, $\cos\alpha + \cos\beta = -\frac{27}{65}$, $\frac{5\pi}{2} < \alpha < 3\pi$, $-\frac{\pi}{2} < \beta < 0$, то значение выражения $\sqrt{130} \cdot \cos\frac{\alpha + \beta}{2}$ равно...</p> <p><u>Решение.</u></p> <p>Применим формулы суммы синусов и косинусов к данным из условия задачи:</p> $\sin\alpha + \sin\beta = 2 \cdot \sin\frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos\frac{\alpha - \beta}{2} = -\frac{21}{65}$ $\cos\alpha + \cos\beta = 2 \cdot \cos\frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos\frac{\alpha - \beta}{2} = -\frac{27}{65}$ <p>Делим первое уравнение на второе. Получаем</p> $\frac{\sin\frac{\alpha + \beta}{2}}{\cos\frac{\alpha + \beta}{2}} = \frac{21}{27}, \text{ откуда } \operatorname{tg}\frac{\alpha + \beta}{2} = \frac{7}{9}.$ <p>Воспользуемся формулой $1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$.</p> $\text{Получаем } \cos^2\frac{\alpha + \beta}{2} = \frac{1}{1 + \frac{49}{81}} = \frac{81}{130}$										

Учтём, что: $\frac{5\pi}{2} < \alpha < 3\pi$, $-\frac{\pi}{2} < \beta < 0$

Значит,
 $2\pi < \alpha + \beta < 3\pi$

Тогда

$\pi < \frac{\alpha + \beta}{2} < \frac{3\pi}{2}$ - третья четверть.

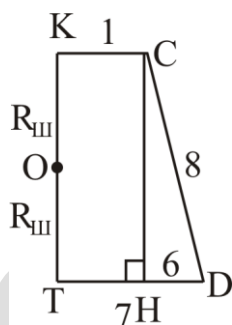
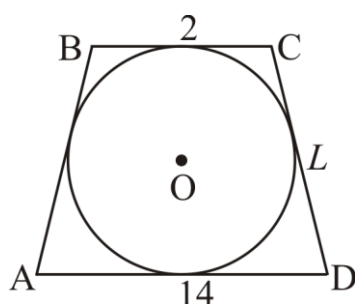
В третьей четверти косинус отрицательный. Окончательно получаем:

$$\sqrt{130} \cos \frac{\alpha + \beta}{2} = -9.$$

Ответ: -9.

- B10. Шар вписан в усечённый конус, радиусы оснований которого равны 1 и 7. Если S – площадь боковой поверхности усечённого конуса, а S_0 – площадь поверхности шара, то значение $\frac{7S}{S_0}$ равно...

Решение.



Рассмотрим осевое сечение данного усеченного конуса. Мы имеем равнобокую трапецию $ABCD$ с основаниями 2 и 14 и образующей L . В трапецию вписана окружность, радиус которой равен радиусу шара. Если в четырёхугольник можно вписать окружность, то суммы его противоположных сторон равны. Поэтому $2L = 2 + 14$, откуда $L = 8$. Теперь найдём радиус шара. Этот радиус равен половине высоты трапеции: $R = OK = OT = \frac{1}{2} CH$.

CH мы найдём из прямоугольного треугольника CHD .

$$HD = 7 - 1 = 6.$$

$$CH = \sqrt{64 - 36} = \sqrt{28} = 2\sqrt{7}; \quad R_{ш} = \sqrt{7}.$$

Вспомним теперь формулы для нахождения боковой поверхности усеченного конуса и шара:

$$S_{\text{бок. кон.}} = \pi L (R + r) = \pi \cdot 8 \cdot (1 + 7) = 64\pi.$$

$$S_{\text{пов. ш.}} = 4\pi R_{ш}^2 = 4 \cdot \pi \cdot 7 = 28\pi.$$

$$\frac{7S}{S_0} = \frac{7 \cdot 64\pi}{28\pi} = 16.$$

Ответ: 16.

- B11. Два насоса разной мощности, работая одновременно, наполняли бассейн водой за 4 часа. После реконструкции производительность первого насоса увеличилась на 20%, а второго - на 60%. Теперь они работая одновременно, наполняют бассейн за 3 часа. За сколько часов может наполнить бассейн первый насос после реконструкции?

Решение.

Обозначим производительность первой трубы x , а второй – y .

Если увеличить производительность первой трубы 20%, то она станет $1,2x$. А увеличенная на 60% производительность второго – $1,6y$.

Всю выполняемую работу примем за единицу. Составим таблицу по условию задачи:

Производительность	Время	Работа
$x + y$	4 ч	1
$1,2x + 1,6y$	3 ч	1
$1,2x$? ч	1

	<p>Составим два уравнения – по первой и второй строке таблицы:</p> $\begin{cases} (x + y) \cdot 4 = 1; \\ (1,2x + 1,6y) \cdot 3 = 1. \end{cases}$ <p>Решая данную систему, получаем $x = \frac{1}{6}$; $y = \frac{1}{12}$.</p> <p>Осталось найти искомое время:</p> <p>1) $1,2 \cdot \frac{1}{6} = 0,2$ - увеличенная на 20% производительность первой трубы.</p> <p>2) $1 : 0,2 = 5$ часов.</p> <p>Ответ: 5.</p>
В12.	<p>Решить уравнение $\log_3(28 - \sin 0,5\pi x) = \sqrt{8 + 2x - x^2}$. В ответе укажите количество корней уравнения.</p> <p><u>Решение.</u></p> <p>Учтём, что $0 \leq \sin 0,5\pi x \leq 1$. Значит, значение подлогарифмического выражения лежит в пределах $27 \leq 28 - \sin 0,5\pi x \leq 28$.</p> <p>Если $\sin 0,5\pi x = 1$, то выражение $\log_3(28 - \sin 0,5\pi x)$ равно $\log_3 27 = 3$.</p> <p>Если $\sin 0,5\pi x = 0$, то выражение $\log_3(28 - \sin 0,5\pi x)$ равно $\log_3 28$, что немного больше 3.</p> <p>Итак, выражение $\log_3(28 - \sin 0,5\pi x)$ равно 3 или немного больше 3.</p> <p>Теперь о правой части уравнения. Подкоренное выражение представляет собой квадратичную функцию, графиком которой является парабола, с ветвями направленными вниз и вершиной в точке (1;9). Значит, подкоренное выражения имеет значение равное или меньшее 9. Тогда значение правой части уравнения может быть равное или меньшее 3 (но не меньше 0).</p> <p>Итак, в уравнении могут быть корни, если и левая, и правая часть уравнения будут равны 3.</p> <p>Правая часть уравнения равна 3, если $x = 1$. Подставим $x = 1$ в левую часть уравнения и получим:</p> $\log_3(28 - \sin 0,5\pi) = \log_3(28 - 1) = \log_3 27 = 3.$ <p>Значит, $x = 1$ – единственный корень уравнения.</p> <p>Ответ: 1</p>