Часть А.

А1. **Натуральными** называют числа, используемые при счёте предметов, т.е. 1, 2, 3, 4 и т.д. Наименьшее натуральное число 1. Множество натуральных чисел обозначается *N*.

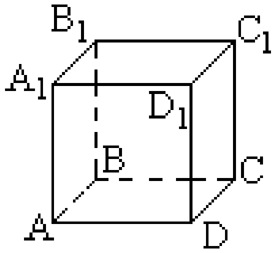
Простыми называются натуральные числа, которые нацело, то есть без остатка, делятся только на 1 и на само себя. Например: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19…

Число 1 не является простым числом.

Чтобы проверить, является ли число простым, надо попробовать разложить число на множители.
Например, проверим, является ли число 127 простым.
Очевидно, что число 127 не делится на 2, 3, 5. Тогда имеет смысл проверять, делится ли нацело число 251 на 7, 11 и другие **простые** числа.
127 на 7 не делится, 127 на 11 не делится, 127 на 13 не делится, 127 на 17 не делится,
127 на 19 не делится, 127 на 23 не делится, 127 на 29 не делится, 127 на 31 не делится,
127 на 37 не делится, 127 на 41 не делится, 127 на 43 не делится, 127 на 47 не делится, 127 на 53 не делится, 127 на 59 не делится, 127 на 61 не делится, 127 на 67 не делится.
Очевидно, что дальше проверять не имеет смысла, т.к. оставшиеся числа больше, чем половина числа 127.
Значит, 127 - простое число.

Составными называются натуральные числа, которые нацело, то есть без остатка, делятся не только на 1 и на само себя, но и на другие целые числа. Например: 4, 9, 33…

Взаимно простые числа – это числа, не имеющие общих делителей, кроме 1.
Например, числа 16 и 35 – взаимно простые, так как не имеют общих делителей, кроме 1. Числа 14 и 35 не являются взаимно простыми, так как, кроме 1, имеют ещё один общий делитель 7.
Ответ: 3).



А2. Грань - плоская поверхность предмета, ограниченная его рёбрами. У куба 6 граней: ABCD, $A_1B_1C_1D_1$, AA_1D_1D и так далее.

Ребро - отрезок, соединяющий две соседние вершины. У куба 12 рёбер: AB, AA_1, AD, BB_1, DD_1 и так далее.

Вершина - точка, соединяющая боковые рёбра и не лежащая в плоскости основания. У куба 8 вершин: A, B, C, D, A_1, B_1, C_1, D_1.

Диагональю многогранника называется отрезок, соединяющий две его вершины, не принадлежащие одной грани. У куба 4 диагонали: AC_1, BD_1, CA_1, DB_1.
Ответ: 3).

А3. Линейной функцией называют функцию, которую можно задать формулой $y = kx + b$, где *k* и *b* – некоторые действительные числа.

Областью определения линейной функции является множество всех действительных чисел, так как выражение $kx + b$ имеет смысл при любых значениях *x*.

График функции представляет собой прямую линию. Число *k* называют **угловым коэффициентом** прямой.
Если $k > 0$, то функция возрастающая, если $k < 0$, то функция убывающая.

Пусть одна прямая задана уравнением $y = k_1 x + b_1$, а вторая прямая задана уравнением $y = k_2 x + b_2$.

Прямые совпадают, если угловые и свободные коэффициенты равны, то есть $k_1 = k_2$ и $b_1 = b_2$.

Прямые параллельны, если угловые коэффициенты равны (а значит, равны углы наклона прямых к положительному направлению оси Ох), а свободные коэффициенты различны.

Прямые пересекаются, если их угловые коэффициенты различны, а значит, прямые не являются параллельными.

Решим систему уравнений, которую мы составили, подставив координаты заданных точек

(2; 10) и (-8; -10) в общую формулу уравнения прямой $y = kx + b$ и найдём коэффициенты k и b:

$\begin{cases} 10 = 2 \cdot k + b \\ -10 = -8k + b \end{cases}$. Решая эту систему, получаем, что k = 2, b = 6.

Ответ: 2).

A4. $2{,}5 \cdot 0{,}1 - \left(-6{,}4 + \frac{2}{5} : 1{,}6 \right) = 0{,}25 + 6{,}4 - \frac{2}{5} \cdot \frac{10}{16} = 6{,}65 - 0{,}25 = 6{,}4$. Ответ: 4).

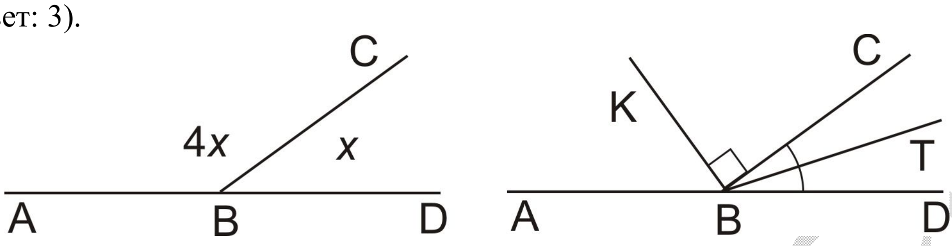
A5. Пусть весь раствор - 100%, тогда, учитывая, что в растворе 200 – 150 = 50 (г) соли, составляем пропорцию:

200г - 100%

50г - х%

$х = \frac{50}{200} \cdot 100\% = 25\%$

Ответ: 3).



A6.

Из точки B восстановим перпендикуляр к прямой BC. Сначала найдём $\angle CBD$, т.е. x. Т.к. углы ABC и CBD – смежные, то их сумма равна 180º. Получаем, что $4x + x = 180º$. Откуда $\angle CBD = x = 36º$.

Угол, который мы ищем – это $\angle KBT$, который состоит из $\angle KBC = 90º$ и $\angle CBT = 0{,}5\ \angle CBD = 36º : 2 = 18º$.

Итак, $\angle KBT = \angle KBC + \angle CBT = 90º + 18º = 108º$.

Если бы мы провели перпендикуляр «в другую сторону», то мы бы получили $\angle KBT = 90º - 18º = 72º$. По условию задачи мы должны указать величину тупого угла.

Ответ: 5).

A7. Найдите радиус основания через длину окружности ($l = 2\pi r$), лежащей в основании: $r = \frac{15}{2\pi}$ и высоту через объем конуса ($V_K = ⅓\, S_{OCH}\, h = ⅓\, \pi r^2 h$) и радиус основания: $h = \frac{512\pi}{25}$.

Вспомним, что осевым сечением конуса является равнобедренный треугольник с основанием $2r$ и высотой h, равной высоте конуса.

Тогда площадь осевого сечения есть $S = \frac{1}{2} 2rh = \frac{768}{5} = 153{,}6$. Ответ: 4).

A8. Начнём с вычисления значения логарифма: $\lg \sqrt[4]{10} = \lg 10^{\frac{1}{4}} = \frac{1}{4} \lg 10 = \frac{1}{4}$.

Нам осталось сравнить три дроби: $\frac{1}{4}, \frac{2}{3}, \frac{7}{18}$. Напомним, что для сравнения дробей их приводят к одинаковому знаменателю, а затем достаточно сравнить числители.

$\frac{1}{4} = \frac{9}{36}$; $\frac{2}{3} = \frac{24}{36}$; $\frac{7}{18} = \frac{14}{36}$. Очевидно, что $\frac{9}{36} < \frac{14}{36} < \frac{24}{36}$. Значит, $\lg \sqrt[4]{10} < \frac{7}{18} < \frac{2}{3}$.

Заметим, и без всяких вычислений можно было определить, что дробь $\frac{2}{3}$ больше других, т.к. это больше половины от единицы, а $\frac{1}{4}$ *и* $\frac{7}{18}$ меньше половины.

Ответ: 4)

A9. Приведем к общему знаменателю 60:

$$\frac{30(x-2)}{60}-\frac{6\cdot 3\cdot (2-x)}{60}+\frac{15\cdot (7x+1)}{60}\le \frac{20\cdot (x+11)}{60}+\frac{3\cdot (13+16x)}{60}.$$

Чтобы избавиться от знаменателей, умножим обе части неравенства на 60.

$$30x-60-36+18x+105x+15\le 20x+220+39+48x$$

$$85x\le 340$$

$$x\le 4$$

Натуральными являются целые числа, большие 0. В данном случае это числа 1; 2; 3; 4. Их сумма равна 10.

Ответ: 3).

А10. Каждое число, бóльшее 10, можно записать в стандартном виде: $a\cdot 10^n$, где $1\le a\le 10$ и n - натуральное число.

Ответ: 4)

А11. **Избавляйтесь от иррациональности (корня) в каждой дроби по отдельности, домножая числитель и знаменатель дроби на выражение, сопряжённое знаменателю. Вспомним, что выражения** a - b **и** $a + b$ **называются сопряжёнными, а их произведение равно разности квадратов:** $(a-b)\cdot(a+b)=a^2-b^2$.

1) $\frac{15}{\sqrt{6}+1}=\frac{15\left(\sqrt{6}-1\right)}{\left(\sqrt{6}+1\right)\left(\sqrt{6}-1\right)}=\frac{15\cdot\left(\sqrt{6}-1\right)}{6-1}=\frac{15\cdot\left(\sqrt{6}-1\right)}{5}=3\sqrt{6}-3.$

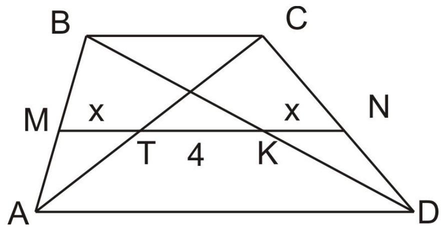
2) $\frac{4}{\sqrt{6}-2}=\frac{4\left(\sqrt{6}+2\right)}{\left(\sqrt{6}-2\right)\left(\sqrt{6}+2\right)}=\frac{4\left(\sqrt{6}+2\right)}{6-4}=2\left(\sqrt{6}+2\right).$

3) $\frac{12}{3-\sqrt{6}}=\frac{12\left(3+\sqrt{6}\right)}{\left(3-\sqrt{6}\right)\left(3+\sqrt{6}\right)}=\frac{12\left(3+\sqrt{6}\right)}{9-6}=4\left(3+\sqrt{6}\right).$

4) Закончим действия в скобках $3\sqrt{6}-3+2\sqrt{6}+4-12-4\sqrt{6}=\sqrt{6}-11$.

5) Последнее действие $\left(\sqrt{6}-11\right)\cdot\left(\sqrt{6}+11\right)=-115$.

Ответ: 1).



А12. $AT = TC$ и $DK = KB$ - по условию задачи.
$TK = 4$, $AD = 24$ - по условию задачи.

Отрезок TK принадлежит средней линии трапеции MN.
Рассмотрим треугольник ABD, в котором отрезок MK является средней линией. Тогда $MK = 12$, а значит отрезок $MT = 8$ см.
Теперь рассмотрим треугольник ABC в котором отрезок MT является средней линией, тогда $BC = 16$ см.
Обратите внимание, что длина отрезков MT и KN одинакова, т.к. они являются средними линиями в треугольниках с одинаковыми основаниями.
Ответ: 2)

А13. Теорема Виета гласит, что если квадратное уравнение $a\cdot x^2+b\cdot x+c=0$ имеет корни x_1 и x_2, то сумма корней $x_1+x_2=-\frac{b}{a}$, а произведение корней $x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}$.

Верно и обратное утверждение: если числа x_1 и x_2 удовлетворяют равенствам $x_1+x_2=-\frac{b}{a}$ и $x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}$, то эти числа являются корнями квадратного уравнения $a\cdot x^2+b\cdot x+c=0$.

Будем решать эту задачу, не находя корни исходного уравнения, хотя решение задачи «в лоб» тоже возможно. В данном квадратном уравнении $x_1 + x_2 = -\frac{5}{3}$, $x_1 \cdot x_2 = -\frac{1}{3}$.

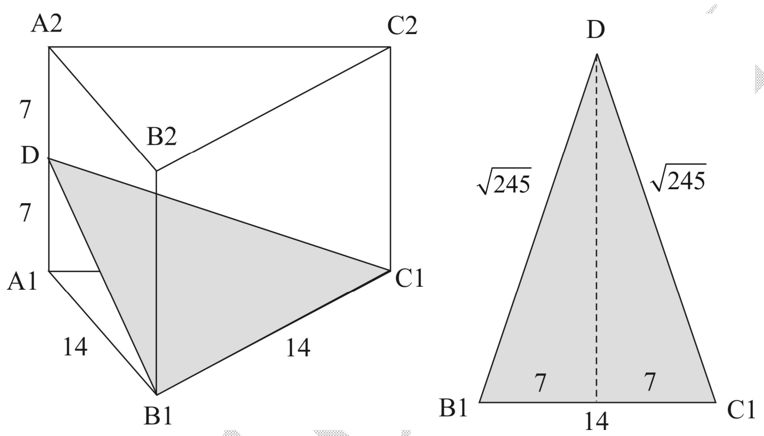
В искомом квадратном уравнении корнями должны быть числа $\frac{1}{x_1}$ и $\frac{1}{x_2}$, тогда сумма корней $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = -\frac{b}{a}$, произведение корней $\frac{1}{x_1} \cdot \frac{1}{x_2} = \frac{c}{a}$.

Преобразуем сумму $\frac{x_1 + x_2}{x_1 \cdot x_2} = -\frac{b}{a}$ и произведение $\frac{1}{x_1 \cdot x_2} = \frac{c}{a}$.

Получаем, что в искомом квадратном уравнении $-\frac{b}{a} = 5$, $\frac{c}{a} = -3$, т.е. оно имеет вид $x^2 - 5 \cdot x - 3 = 0$.

Ответ: 2)

A14. Сделаем чертёж.



Рассмотрим прямоугольный треугольник DA_1B_1. По теореме Пифагора находим, что $DB_1 = \sqrt{245}$.
Теперь рассмотрим равнобедренный треугольник DC_1B_1. Найдём высоту, проведённую к основанию. Она равна 14. Тогда площадь сечения равна 98.
Ответ: 1)

A15. В числителе дроби четыре слагаемых, поэтому надо попробовать произвести группировку, но предварительно вынесем общий множитель 40 за скобки.

Получаем $\frac{40x^3 + 160x^2 - 360x - 1440}{2x^2 + 5x - 12} = \frac{40\left(x^3 + 4x^2 - 9x - 36\right)}{2x^2 + 5x - 12}$.

У Вас может возникнуть вопрос: «Какие слагаемые группировать»? Не стоит тратить время на поиск ответа - группируйте первое слагаемое со вторым, а третье с четвёртым. Если не получится - поменяете пары слагаемых.
В данном примере:

$$x^3 + 4x^2 - 9x - 36 = x^2 \cdot (x+4) - 9 \cdot (x+4) = (x+4) \cdot \left(x^2 - 9\right) = (x+4) \cdot (x-3) \cdot (x+3)$$

На последнем шаге мы применили формулу разложения разности квадратов.

В знаменателе проведём разложение на множители квадратного трёхчлена. Для этого воспользуемся формулой: $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$ (не потеряйте коэффициент ***a*!**),
где x_1 и x_2 - корни уравнения $ax^2 + bx + c = 0$.

В данном примере решим квадратное уравнение $2x^2 + 5x - 12 = 0$.

Корни этого уравнения: $x_1 = \frac{3}{2}$; $x_2 = -4$.

Тогда $2x^2+5x-12=2\cdot\left(x-\dfrac{3}{2}\right)\cdot(x+4)=(2x-3)\cdot(x+4)$.

В результате упрощения исходной дроби получаем: $\dfrac{40(x-3)\cdot(x+3)}{2x-3}$.

Теперь подставляем в полученное выражение $x=\dfrac{13}{2}$ и получаем ответ 133.

Ответ: 5).

А16. Учтём, что

$$\sin^4\alpha+\cos^4\alpha=(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)^2-2\cdot\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha=1-2\cdot\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha=$$

$$=1-\frac{4\cdot\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha}{2}=1-\frac{(2\cdot\sin\alpha\cdot\cos\alpha)^2}{2}=1-\frac{1}{2}\cdot\sin^2 2\alpha$$

Преобразуем выражение $2\sin^4 x+2\cos^4 x=2\cdot\left(1-\dfrac{1}{2}\cdot\sin^2 2x\right)=2-\sin^2 2x$.

Тогда $f(x)=5-2\sin^4 x-2\cos^4 x=5-2+\sin^2 2x=3+\sin^2 2x$.

Учитывая, что $0\le\sin^2 2x\le 1$, получаем наибольшее значение функции 4.
Ответ: 4).

А17. ОДЗ, как всегда, находим из исходного уравнения: $\begin{cases}x-2>0\\ x\ne 4\end{cases}$

Казалось бы, простое уравнение, но обратите внимание, что $\log_2(x-4)^2=2\log_2|x-4|$

Если бы мы записали, что $\log_2(x-4)^2=2\log_2(x-4)$**, то ОДЗ стало бы** $x-4>0$**, а это противоречит условию. Поэтому, когда четная степень выносится перед логарифмом, подлогарифмическое выражение должно остаться положительным:** $\log_a x^2=2\log_a|x|$

Решим уравнение $\log_2(x-2)+\log_2|x-4|=0$

$\log_2(x-2)\cdot|x-4|=0$

$(x-2)\cdot|x-4|=1$

1) $\begin{cases}x-4>0\\ x^2-6x+7=0\end{cases}$

$x_1=3+\sqrt{2}$

$x_2=3-\sqrt{2}$ - не удовлетворяет условию

2) $\begin{cases}x-4<0\\ x^2-6x+9=0\end{cases}$

$x=3$

Итак, корни уравнения: $3+\sqrt{2}$; 3.
Ответ: 4).

А 18. Пусть катки встретятся через *n* минут. Тогда путь первого катка $S_1=5n$, а путь второго катка равен сумме *n* первых членов арифметической прогрессии, первый член которой равен 1,5, разность прогрессии равна 0,5.

Сумма *n* первых членов арифметической прогрессии находится по формуле $S_n=\dfrac{a_1+a_n}{2}\cdot n$, где

$a_n=a_1+d\cdot(n-1)$. Тогда $S_n=\dfrac{2a_1+d(n-1)}{2}\cdot n$

Для второго катка находим $S_n=\dfrac{3+0,5(n-1)}{2}\cdot n$.

Получаем уравнение $5n+\dfrac{3+0,5(n-1)}{2}\cdot n=99$. Находим n = 11.

Ответ: 2)

Часть В

В1. Заменим $(2-x)^2$ на $(x-2)^2$ и $(1-5x)^3$ на $-(5x-1)^3$ и получим: $-\dfrac{(x-5)(x-2)^2(x-6)^4(x+3)}{x^2(5x-1)^3(x-7)}\le 0$.

Домножим левую и правую часть неравенства на -1, не забыв при этом изменить знак неравенства на противоположный.

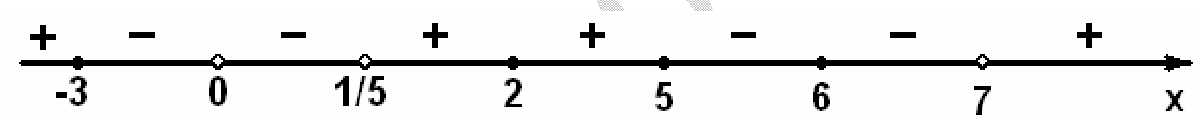
Тогда $\dfrac{(x-5)(x-2)^2(x-6)^4(x+3)}{x^2(5x-1)^3(x-7)}\ge 0$.

Мы добивались, чтобы перед переменной x в каждом из множителей был плюс.

Найдем корни всех множителей, тем самым находим в каких точках левая часть неравенства **<u>может</u>** поменять знак.

Наносим все корни на числовую ось, причем все корни знаменателя "выколоты", а корни в числителе "закрашены" в случае нестрогого неравенства (больше или равно, меньше или равно). Если же неравенство строгое (больше или меньше), то корни числителя также выколоты.

Теперь при всех x, больших 7, каждый из множителей больше нуля. Поэтому в правом крайнем интервале знак "+". Затем происходит смена знака, если корень из множителя нечетной степени, и сохранение знака, если корень из множителя четной степени.



В данном случае:

7 – из множителя нечетной степени, поэтому знак "+" меняем на знак "-";
6 – из множителя четной степени – знак "-" сохраняем;
5 – из множителя нечетной степени – меняем знак "-" на знак "+";
2 – из множителя четной степени – сохраняем знак "+" и т.д.

Обратите внимание, что число 6 также включается в ответ (все "закрашенные" точки должны быть в ответе).

Ответ неравенства: $(-\infty;-3]\cup\left(\dfrac{1}{5};5\right]\cup\{6\}\cup(7;+\infty)$.

Сумма всех натуральных чисел, меньших 10, равна 38.
Ответ: 38.

В2. Возведём обе части в квадрат, при этом учтём, что правая часть уравнения неотрицательна.

$$\begin{cases}1+x\sqrt{x^2-34}=x^2-2x+1\\ x-1\ge 0\end{cases}.$$

$$\begin{cases}x\sqrt{x^2-34}=x(x-2)\\ x-1\ge 0\end{cases}.$$

Нельзя сокращать на *x*, так как это может привести к потере корней. Выносим *x* за скобки!!!

$$\begin{cases} x\sqrt{x^2-34}-x(x-2)=0 \\ x-1\geq 0 \end{cases},$$

$$\begin{cases} x\cdot\left(\sqrt{x^2-34}-(x-2)\right)=0 \\ x-1\geq 0 \end{cases}.$$

Обратите внимание на правильную организацию записей. Экономия на оформлении решения может привести к ошибке.

Теперь рассмотрим совокупность двух случаев, когда произведение равно нулю.:

$$\begin{cases} x=0 \\ x-1\geq 0 \end{cases} \quad - \quad \text{нет решений},$$

$$\begin{cases} \sqrt{x^2-34}=x-2 \\ x-1\geq 0 \\ x-2\geq 0 \end{cases}.$$

При решении уравнения $\sqrt{x^2-34}=x-2$ учтём, что правая часть уравнения неотрицательна.

$$\begin{cases} x^2-34=x^2-4x+4 \\ x\geq 2 \end{cases}.$$

$x=9{,}5$ - удовлетворяет условию $x\geq 2$.

Осталось 9,5 умножить на 10 в соответствии с условием.

Ответ: 95

B3. Введем двойную замену переменных.

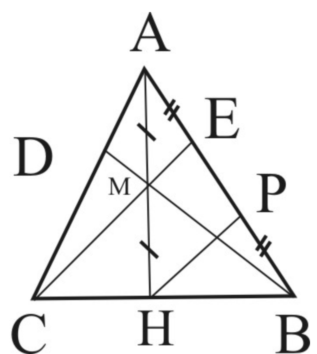
$$a=\frac{1}{2x-3y},\ b=\frac{2}{3x-2y}$$

$$\begin{cases} a+b=\dfrac{3}{4} \\ 3a-2b=1 \end{cases}$$

$$a=\frac{3}{4}-b \Rightarrow 3\cdot\left(\frac{3}{4}-b\right)-2b=1 \Rightarrow 9-12b-8b-4=0 \Rightarrow b=\frac{1}{4},\ a=\frac{1}{2}$$

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2x-3y}=\dfrac{1}{2} \\ \dfrac{2}{3x-2y}=\dfrac{1}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x-3y=2 \\ 3x-2y=8 \end{cases} \Rightarrow x=4,\ y=2 \Rightarrow x+2y=8$$

Ответ: 8.



B4. $S_{\Delta CMB}=\dfrac{1}{2}S_{\Delta ABC}$, так как у треугольников общее основание *CB*, а высоты *AH* и *MH* отличаются в 2 раза. Проведем из точки *H* отрезок *HP*, параллельный *CE*. По теореме Фалеса *EP* = *PB*.

С другой стороны по теореме Фалеса $EP = AE$. Значит, боковая сторона AB разбита на три равных отрезка $AE = EP = PB$. Рассмотрим треугольники EMA и EMB. У треугольников общая высота, проведенная из точки M (показывать на чертеже эту высоту не будем, чтобы не загромождать чертеж). Основания треугольников AE и EB отличаются в 2 раза: $AE = 0{,}5EB$.

Значит, и площади треугольников отличаются в 2 раза.

Пусть площадь треугольника AME равна S. Тогда $S_{\Delta AME} = S_{\Delta AMD} = S, \quad S_{\Delta EMB} = S_{\Delta DMC} = 2S$. Получаем $6S = \frac{1}{2} \cdot 186$. Тогда $S = \frac{186}{12}$. Площадь искомого четырехугольника равна $2S$, то есть 31.

Ответ: 31.

B5. Преобразуем $5 - 4 \cdot \left(1 - \cos^2 2x\right) - 4 \cdot \cos 2x = 0$

$5 - 4 + 4 \cdot \cos^2 2x - 4 \cdot \cos 2x = 0$

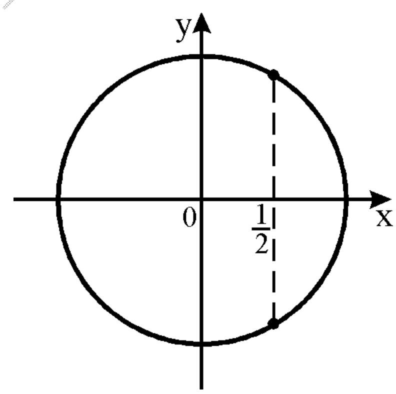
$4 \cdot \cos^2 2x - 4 \cdot \cos 2x + 1 = 0$

Произведём замену переменных $\cos 2x = t$

$4 \cdot t^2 - 4 \cdot t + 1 = 0$, тогда $t = \frac{1}{2}$, а значит $\cos 2x = \frac{1}{2}$

Теперь важная фишка: если нам достаточно найти количество корней, то можно сократить дальнейшее решение и не находить корни уравнения.

Нанесём на единичную окружность точки, соответствующие значению косинуса, равного 1/2.



Обратите внимание, что $\cos 2x = \frac{1}{2}$, а не $\cos x = \frac{1}{2}$, поэтому расширим промежуток от $x \in [-\pi; \pi]$ до $2x \in [-2 \cdot \pi; 2 \cdot \pi]$.

Значит, надо сделать 2 оборота вдоль окружности. Так как на окружность находится 2 точки, то в уравнении 4 корня.

Ответ: 4.

B6. Пусть x - скорость “приятеля”, тогда скорость “пассажира” $2x$, а скорость трамвая $8x$.

Через минуту расстояние между трамваем и “приятелем” составит $9x$.

Пассажир догоняет приятеля со скоростью $2x - x = x$. Тогда отставание в $9x$ будет ликвидировано за $\frac{9x}{x} = 9$ минут.

Ответ: 9.

B7. В таких уравнениях лучше начинать раскрытие модуля изнутри.

Рассмотрим два случая:

1) если $x - 1 \geq 0$, то $\begin{cases} x - 1 \geq 0 \\ \left|x^2 - 3x\right| = x^2 - 2 \end{cases}$,

2) если $x - 1 < 0$, то $\begin{cases} x - 1 < 0 \\ \left|-x^2 - x\right| = x^2 - 2 \end{cases}$.

Каждый из этих случаев, в свою очередь, распадается ещё на два случая.

$$1a.\begin{cases} x-1\geq 0 \\ x^2-3x\geq 0 \\ x^2-3x=x^2-2 \end{cases} \qquad 1б.\begin{cases} x-1\geq 0 \\ x^2-3x<0 \\ -x^2+3x=x^2-2 \end{cases},$$

$$2a.\begin{cases} x-1<0 \\ -x^2-x\geq 0 \\ -x^2-x=x^2-2 \end{cases} \qquad 2б.\begin{cases} x-1<0 \\ -x^2-x<0 \\ x^2+x=x^2-2 \end{cases}.$$

Решаем в каждой системе уравнение и проверяем выполнение условий неравенств.
Корни уравнения ± 2.
Ответ: –4.

B8. Пусть в прогрессии со знаменателем q количество членов равно n.
Члены прогрессии, стоящие на нечётных номерах, образуют новую геометрическую прогрессию, первый член которой равен b_1, со знаменателем q^2, и количеством членов $n/2$.
Мы знаем, что в общем случае сумма n первых членов геометрической прогрессии вычисляется по формуле $\mathrm{S_n}=\dfrac{\mathrm{b_1\cdot(1-q^n)}}{\mathrm{1-q}}$,

тогда в нашем случае $\mathrm{S_{НЕЧЁТ.}}=\dfrac{\mathrm{b_1\cdot\left(1-\left(q^2\right)^{\frac{n}{2}}\right)}}{\mathrm{1-q^2}}==\dfrac{\mathrm{b_1\cdot(1-q^n)}}{\mathrm{1-q^2}}$.

По условию задачи $\dfrac{\mathrm{S_n}}{\mathrm{S_{НЕЧЁТ}}}=3$, откуда $q=2$.

Кстати, члены прогрессии, стоящие на чётных номерах, тоже образуют геометрическую прогрессию, первый член которой равен b_2, со знаменателем q^2, и количеством членов $n/2$.

Сумма членов этой прогрессии равна $\mathrm{S_{ЧЁТ.}}=\dfrac{\mathrm{b_2\cdot\left(1-\left(q^2\right)^{\frac{n}{2}}\right)}}{\mathrm{1-q^2}}==\dfrac{\mathrm{b_1q\cdot(1-q^n)}}{\mathrm{1-q^2}}$.

Ответ: 2.

B9. При решении неравенства будем использовать **обобщённый метод интервалов.**

При решении этим методом действуйте по схеме:
1. Определите ОДЗ
2. Преобразуйте неравенство так, чтобы в правой части был ноль (в левой части, если это возможно, приведите к общему знаменателю, разложите на множители и т.п.)
3. Найдите все корни числителя и знаменателя и нанесите их на числовую ось, причём, если неравенство нестрогое, закрасьте корни числителя
4. Найдите знаки на каждом из интервалов, подставляя в преобразованное неравенство число из данного интервала. НЕЛЬЗЯ РАССТАВЛЯТЬ ЗНАКИ ПО ПРИНЦИПУ ПЛЮС – МИНУС – ПЛЮС
5. Найдите пересечение ОДЗ и удовлетворяющих неравенству промежутков, при этом не потеряйте отдельные точки, удовлетворяющих неравенству.

Преобразуем числитель:

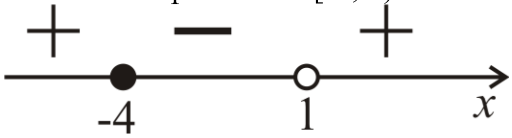
$$14^{3x+5} - 2^{2x+1} \cdot 7^{4x+9} = 2^{3x+5} \cdot 7^{3x+5} - 2^{2x+1} \cdot 7^{4x+9} =$$
$$= 2^{3x} \cdot 2^5 \cdot 7^{3x} \cdot 7^5 - 2^{2x} \cdot 2 \cdot 7^{4x} \cdot 7^9 = 2^{2x} \cdot 2 \cdot 7^{3x} \cdot 7^5 \left(2^x \cdot 2^4 - 7^x \cdot 7^4\right)$$

Теперь нам предстоит решить неравенство $\dfrac{2^{2x} \cdot 2 \cdot 7^{3x} \cdot 7^5 \left(2^x \cdot 2^4 - 7^x \cdot 7^4\right)}{1-x} \le 0$.

Выражение $2^{2x} \cdot 2 \cdot 7^{3x} \cdot 7^5$ всегда больше нуля, поэтому решаем неравенство $\dfrac{2^x \cdot 2^4 - 7^x \cdot 7^4}{1-x} \le 0$.

Корень числителя x = -4, корень знаменателя x =1.

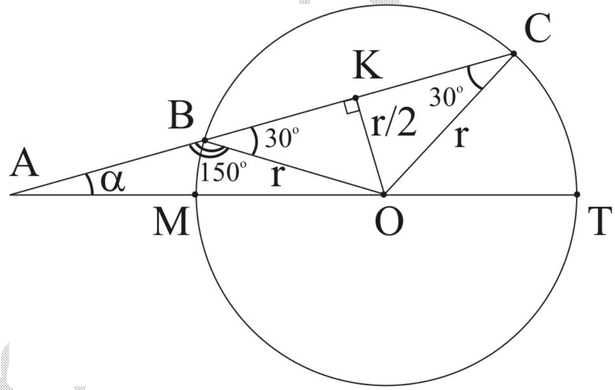
Наносим эти корни на числовую ось, определяем знаки неравенства на каждом промежутке и получаем, что ответ неравенства [-4; 1).



Тогда сумма целых решений равна -10.
Ответ: -10.

B10. Через точку A, лежащую на расстоянии $2r$ от центра окружности радиуса r, проведена прямая на расстоянии $r/2$ от центра окружности, пересекающая окружность в точках B и C.

Найдите длину отрезка AB, если $r = \dfrac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{3}}$.



Для всех секущих, выходящих из данной точки, касания равны произведения длины внешнего отрезка секущей на длину всей секущей $AM \cdot AT = AB \cdot AC$. Тогда $r \cdot 3r = AB \cdot AC$ или $AB \cdot AC = 3 \cdot r^2$.

С другой стороны $AC = AB + BC$, где $BC = r \cdot \sqrt{3}$. Получаем $AB \cdot \left(AB + r \cdot \sqrt{3}\right) = 3 \cdot r^2$. Открываем скобки, решаем квадратное уравнение и получаем $AB = \dfrac{r\sqrt{3}}{2}\left(\sqrt{5}-1\right)$.

Ответ: 2.

B11. Найдите значение выражения: $\left(\dfrac{2\cos 40^\circ - \sin 70^\circ}{\sin 340^\circ}\right)^2$.

Догадаемся преобразовать

$$\frac{2\cos 40^\circ - \sin 70^\circ}{\sin 340^\circ} = \frac{\cos 40^\circ + \cos 40^\circ - \sin 70^\circ}{\sin 340^\circ} = \frac{\cos 40^\circ + \cos 40^\circ - \cos 20^\circ}{\sin 340^\circ} =$$

$$= \frac{\cos 40^\circ - 2\sin 10^\circ \cdot \sin 30^\circ}{\sin 340^\circ} = \frac{\cos 40^\circ - \sin 10^\circ}{\sin 340^\circ} = \frac{\sin 50^\circ - \sin 10^\circ}{\sin 340^\circ} = \frac{2\sin 20^\circ \cdot \cos 30^\circ}{\sin 340^\circ} = .$$

$$= \frac{\sqrt{3}\sin 20^\circ}{\sin 340^\circ} = \frac{\sqrt{3}\sin 20^\circ}{\sin\left(360^\circ - 20^\circ\right)} = -\frac{\sqrt{3}\sin 20^\circ}{\sin 20^\circ} = -\sqrt{3}$$

Ответ 3.

B12. Решить неравенство $\cos^2(x-3)\cdot\log_3\left(6x-6-x^2\right)\geq 1$. В ответе укажите сумму целых решений.

Догадаемся преобразовать условие так: $\log_3\left(6x-6-x^2\right)\geq \dfrac{1}{\cos^2(x-3)}$.

Вообще делить или умножать левую и правую часть неравенства на некоторое выражение с переменной можно только в случае, когда это выражение неотрицательно. В этом случае знак неравенства не изменяется. Если же знак выражения с переменной неизвестен, то ни делить, ни умножать обе части неравенства на выражение с переменной x нельзя.

В данном случае мы делили обе части неравенства на неотрицательное выражение $\cos^2(x-3)$.

Вспомним одну из основных тригонометрических формул $\mathrm{tg}^2\alpha + 1 = \dfrac{1}{\cos^2\alpha}$.

Тогда $\log_3\left(6x-6-x^2\right)\geq tg^2(x-3)+1$.

Теперь оценим обе части неравенства.

Подлогарифмическое выражение в левой части представляет собой квадратичную функцию, график которой представляет собой параболу с ветвями направленными вниз и вершиной в точке (3; 3). Тогда наибольшее значение подлогарифмического выражения равно 3. Значит, левая часть неравенства меньше или равна 1.

Правая часть неравенства, очевидно больше или равна 1. В точке $x = 3$ обе части неравенства равны 1.

Итак, единственным решением неравенства является число $x = 3$.

Ответ: 3.